

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$  függvény.

5p a) Számítsd ki  $f'(x)$ -et, ha  $x \in (0, +\infty)$ .

5p b) Határozd meg az  $f$  függvény grafikus képehez az  $A(1;0)$  pontban húzott érintő egyenletét!

5p c) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x}$  határértéket!

2. Adottak az  $f, F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$  és  $F(x) = x - \ln x$  függvények.

5p a) Igazold, hogy az  $F$  függvény az  $f$  függvénynek egy primitív függvénye!

5p b) Számítsd ki az  $\int_1^2 F(x) \cdot f(x) dx$  értékét!

5p c) Határozd meg az  $F$  függvény grafikus képe, az  $Ox$  koordinátatengely, valamint az  $x=1$  és  $x=e$  egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!