

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \in (0; 1) \\ 1 + \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ függvény.

5p

a) Tanulmányozd az f függvény folytonosságát az $x_0 = 1$ pontban!

5p

b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ határértéket!

5p

c) Igazold, hogy $f(x) \geq \frac{3}{4}$, bármely $x > 0$ esetén!

2. Adottak az $f, g : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ és $g(x) = x \ln x$ függvények.

5p

a) Igazold, hogy $\int_1^2 f(x) dx = 2 \ln 2 + \frac{7}{3}$.

5p

b) Igazold, hogy $\int_1^2 g(x) dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$.

5p

c) Igazold, hogy létezik $x_0 \in (1; 2)$ úgy, hogy $f(x_0) > g(x_0) + 3$.