

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x} - 3x$ függvény.

5p

a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{3\sqrt{x}-6}{2}$, bármely $x \in (0; +\infty)$ esetén!

5p

b) Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait!

5p

c) Igazold, hogy $-4 \leq f(x) + f(x^2) \leq 0$, bármely $x \in (0; 1]$ esetén!

2. Adottak az $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 3x^2 + 2$ és $F(x) = e^x + x^3 + 2x - 1$ függvények.

5p

a) Igazold, hogy az F függvény az f függvénynek egy primitív függvénye!

5p

b) Számítsd ki az $\int_0^1 f(x) \cdot F(x) dx$ értékét!

5p

c) Igazold, hogy $\int_0^1 (xf(x) + F(x)) dx = F(1)$.