

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
II. FELADAT (30p)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ és $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok, valamint a $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid X^2 = -I_2\}$ halmaz, ahol $X^2 = X \cdot X$.

5p a) Igazold, hogy $A \in G$.

5p b) Igazold, hogy $\left(\frac{1}{2}(X + I_2)\right)^2 = \frac{1}{2}X$, bármely $X \in G$ esetén!

5p c) Igazold, hogy ha X másodrendű, valós számokból álló négyzetes mátrix, amely teljesíti az $A \cdot X = X \cdot A$ összefüggést, akkor $X = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$ alakú, ahol $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Adott az $f = X^4 + aX^3 + bX + c$ polinom, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5p a) Igazold, hogy $c = 501$ esetén $f(1) + f(-1) = 1004$.

5p b) Számítsd ki az f polinom valós gyökeit, ha $a = -2$, $b = 2$ és $c = -1$.

5p c) Igazold, hogy nincsenek olyan valós a, b, c számok, amelyekre az f polinom osztható a $g = X^3 - X$ polinommal.