

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$, bármely $x \in (0; +\infty)$ esetén!

5p b) Igazold, hogy $2009\sqrt{2011} \leq 2010\sqrt{2010}$.

5p c) Igazold, hogy az f függvénynek nincs aszimptotája a $+\infty$ felé!

2. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x < 1 \\ (x+1)\ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f függvénynek van primitív függvénye az \mathbb{R} -en!

5p b) Igazold, hogy $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{7}{6}$.

5p c) Számítsd ki a $h : [1; e] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{f(x)}{x+1}$ függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!