

II. FELADAT (30p)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok, valamint az

$f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(X) = X^2 - 3X + I_3$ függvény, ahol $X^2 = X \cdot X$.

5p a) Számítsd ki: $\det(I_3 + B)$.

5p b) Bizonyítsd be, hogy $f(A) = I_3 + B$.

5p c) Igazold, hogy $(f(A))^3 = I_3 + 3B + 3B^2$, ahol $(f(A))^3 = f(A) \cdot f(A) \cdot f(A)$.

2. Az egész számok halmazán értelmezzük az $x * y = x + y - 3$ és $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$ műveleteket.

5p a) Oldd meg az egész számok halmazán az $x \circ x = x * x$ egyenletet!

5p b) Határozd meg az a egész számot úgy, hogy teljesüljön az $x \circ 3 = a$ egyenlőség bármely x egész szám esetén!

5p c) Oldd meg az $\begin{cases} x * (y + 1) = 4 \\ (x - y) \circ 1 = 5 \end{cases}$ egyenletrendszert, ahol $x, y \in \mathbb{Z}$.