

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = e^x - ex - 1$ függvény.

5p a) Számítsd ki $f'(x)$ -et, ha $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Igazold, hogy az f függvény konvex az \mathbb{R} -en!

5p c) Határozd meg az f függvény grafikus képehez az $O(0, 0)$ pontban húzott érintő egyenesnek az $x = 1$ egyenletű egyenessel való metszéspontjának koordinátáit.

2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x + \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f függvénynek vannak primitív függvénye az \mathbb{R} -en!

5p b) Számítsd ki az $\int_{-1}^1 f(x) dx$ értékét!

5p c) Igazold, hogy ha $\int_a^b f(x) dx = \int_b^c f(x) dx$, ahol a, b, c valós számok, és az $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az f függvénynek egy primitív függvénye, akkor az $F(a), F(b), F(c)$ számok egy számtani haladvány egymás után következő tagjai!