

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, bármely $x > 0$ esetén!

5p b) Határozd meg az f függvény ferde aszimptotáját $+\infty$ felé!

5p c) Igazold, hogy az f függvény konvex a $(0, +\infty)$ intervallumon!

2. Adottak az $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (x^{n+1} + 1) \cdot e^x$ függvények, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

5p a) Számítsd ki: $\int_0^1 f_0(x) \cdot e^{-x} dx$.

5p b) Határozd meg az f_1 függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x = 0$ és $x = 1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

5p c) Igazold, hogy $\int_0^1 f_{2008}(x) dx + \int_0^1 f_{2010}(x) dx \geq 2 \int_0^1 f_{2009}(x) dx$.