

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x + x^2$  függvény.

**5p** a) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$  határértéket!

**5p** b) Bizonyítsd be, hogy az  $f$  függvénynek nincs aszimptotája a  $+\infty$  felé!

**5p** c) Bizonyítsd be, hogy az  $f$  függvény konvex  $\mathbb{R}$ -en!

2. Adott az  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x(1 + \ln x)}$  függvény.

**5p** a) Számítsd ki az  $\int_1^e f'(x) dx$  értékét!

**5p** b) Igazold, hogy az  $f$  függvény bármely primitív függvénye növekvő az  $[1, +\infty)$  intervallumon!

**5p** c) Határozd meg az  $a \in (1, e^2)$  valós számot úgy, hogy az  $f$  függvény grafikus képe, az  $Ox$  koordinátatengely, valamint az  $x = a$  és  $x = e^2$  egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe  $\ln \frac{3}{2}$  legyen.