

**III. FELADAT (30p)**

1. Adottak az  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_0(x) = e^{-x} - 1$ ,  $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$  függvények minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén.

5p a) Számítsd ki:  $f_1(x)$ -et, ha  $x \in \mathbb{R}$ .

5p b) Határozd meg az  $f_0$  függvény grafikus képe vízszintes aszimptotájának egyenletét a  $+\infty$  felé!

5p c) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x) + x - 1}{x^2}$  határértéket!

2. Adott az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x \sqrt{x^2 + 1}$  függvény.

5p a) Igazold, hogy  $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = e - 1$ .

5p b) Számítsd ki a  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x e^{-x} f(x)$  függvény grafikus képe, az  $Ox$  koordinátatengely, valamint az  $x = 0$  és  $x = 1$  egyenesek által határolt síkidom területét!

5p c) Számítsd ki:  $\int_{-1}^1 \sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x) dx$ .