

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+3}{x^2+1}, & x \leq 1 \\ \frac{2x+a}{x^2+2}, & x > 1 \end{cases}$ függvény, ahol $a \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Határozd meg az a valós számot úgy, hogy az f függvény folytonos legyen az $x_0 = 1$ pontban!
- 5p** b) Határozd meg az f függvény grafikus képe $-\infty$ felé mutató vízszintes aszimptotájának egyenletét!
- 5p** c) Határozd meg az a valós számot úgy, hogy a grafikus képhez a $(2; f(2))$ pontban húzott érintő iránytényezője 1 legyen.

2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$ függvény.

- 5p** a) Igazold, hogy $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx = e - 1$.
- 5p** b) Számítsd ki az $\int_0^1 x f(x) dx$ értékét!
- 5p** c) Bizonyítsd be, hogy $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq e$.