

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ függvény.

5p a) Számítsd ki $f'(x)$ -et, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

5p b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$ határértéket.

5p c) Határozd meg az f függvény grafikus képe a $+\infty$ felé mutató vízszintes aszimptotáját!

2. Legyen $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n e^x$ és $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$, bármely n zérótól különböző természetes szám esetén.

5p a) Igazold, hogy $\int_0^1 e^{-x} f_1(x) dx = \frac{1}{2}$.

5p b) Számítsd ki: I_1 .

5p c) Igazold, hogy $I_n + nI_{n-1} = e$ $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ esetén!