

**III. FELADAT (30p)**

1. Adottak az  $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , bármely  $n \in \mathbb{N}^*$  függvények, ahol  $f_0(x) = \ln x$  és  $f_n(x) = f'_{n-1}(x)$ .

**5p** a) Határozd meg az  $f_1$  függvényt!

**5p** b) Határozd meg az  $f_2$  függvény grafikus képe  $+\infty$  felé mutató aszimptotájának egyenletét!

**5p** c) Igazold, hogy az  $f_0(x) \leq \frac{1}{f_1(x)} - 1$ , bármely  $x \in (0, +\infty)$  esetén!

2. Adott az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$  függvény.

**5p** a) Számítsd ki az  $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x) dx$  értékét!

**5p** b) Bizonyítsd be, hogy az  $f$  függvény bármely primitív függvénye növekvő a  $(0, +\infty)$  intervallumon!

**5p** c) Bizonyítsd be, hogy  $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx > \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$ .