

III. FELADAT (30p)

1. Adottak az $f, h: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ és $h(x) = f^2(x)$ függvények.

5p

a) Igazold, hogy $h'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$, bármely $x \geq 0$ esetén!

5p

b) Határozd meg az f függvény grafikus képe $+\infty$ felé mutató aszimptotájának egyenletét!

5p

c) Igazold, hogy a h függvény növekvő a $[0, +\infty)$ intervallumon!

2. Adott az $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + 1$ függvény.

5p

a) Bizonyítsd be, hogy $\int_0^1 (x+1)(x+2)f(x)dx = \frac{22}{3}$.

5p

b) Számítsd ki az $\int_0^1 f(x)dx$ értékét!

5p

b) Határozd meg a k pozitív valós számot úgy, hogy az f függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x=0$ és $x=k$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe $k + \ln k$ legyen!