

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$ függvény.

5p

a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$, bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ esetén!

5p

b) Határozd meg az f függvény grafikus képe ferde aszimptotájának egyenletét $+\infty$ felé!

5p

c) Igazold, hogy $f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) \geq 8$, bármely $x > 1$ esetén!

2. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x + 3^{-x}$ függvény.

5p

a) Számítsd ki az $\int_{-1}^1 f(x) dx$ értékét!

5p

b) Számítsd ki a $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3^{-x}$ függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!

5p

c) Igazold, hogy az f függvény bármely F primitív függvénye konkáv a $(-\infty, 0]$ intervallumon és konvex a $[0, +\infty)$ intervallumon!