

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
II. FELADAT (30p)

1. Adott az $\begin{cases} ax + 2y = 0 \\ 4x + y = 0 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$ egyenletrendszer, $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ az egyenletrendszer mátrixa, valamint az $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és az $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix. Jelölje $A^2 = A \cdot A$.

5p a) Oldd meg az egyenletrendszert $a = -1$ esetén!

5p b) Igazold az $A^2 - (a+1)A + (a-8)I_2 = O_2$ egyenlőséget!

5p c) Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ értékét, ha az A mátrix teljesíti az $A^2 = 9I_2$ egyenlőséget!

2. Az egész számok halmazán értelmezzük az $x \circ y = x + y + 11$ műveletet.

5p a) Igazold, hogy a „ \circ ” művelet asszociatív!

5p b) Oldd meg az $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{6\text{-szor } x} = 1$ egyenletet az egész számok halmazán!

5p c) Igazold, hogy (\mathbb{Z}, \circ) kommutatív csoport!