

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, bármely $x > 1$ esetén!

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez az $A(2; e^2)$ pontban húzott érintő egyenletét!

5p c) Igazold, hogy $f(x) \geq e^2$, bármely $x > 1$ esetén.

2. Adottak az $f_n : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^n + 4x}$ függvények minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

5p a) Igazold, hogy $\int_1^4 f_1(x) dx = \frac{14\sqrt{5}}{3}$.

5p b) Számítsd ki az $\int_1^4 \frac{x+2}{f_2^2(x)} dx$ értékét.

5p c) Számítsd ki a $g : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f_2(x)}$ függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!