

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - e \ln x$ függvény.

5p a) Számítsd ki $f'(x)$ -et, ha $x \in (0, \infty)$.

5p b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)}{f'(x)}$ határértéket!

5p c) Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait!

2. Adott az $f : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$ függvény.

5p a) Számítsd ki az $\int_2^e \left(f(x) - \frac{1}{x-1} \right) dx$ értékét!

5p b) Igazold, hogy az f függvény bármely F primitív függvénye konkáv a $[2; +\infty)$ intervallumon!

5p c) Határozd meg az $a > 2$ valós szám értékét úgy, hogy az f függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x = 2$ és $x = a$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területe $\ln 3$ legyen!