

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
II. FELADAT (30p)

1. Adott a $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ determináns.

5p a) Számítsd ki a Δ determináns értékét, ha $a = -1$, $b = 0$ és $c = 1$.

5p b) Igazold, hogy $\Delta = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

5p c) Oldd meg a valós számok halmazán a $\begin{vmatrix} 2^x & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 1 \\ 1 & 1 & 2^x \end{vmatrix} = 0$ egyenletet!

2. Az egész számok halmazán értelmezzük az $x * y = x + y + 3$, $x \circ y = ax + y - 3$ műveleteket, ahol $a \in \mathbb{Z}$, valamint az $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = x + 6$ függvényt.

5p a) Számítsd ki: $(1 * 2) * (0 \circ 3)$.

5p b) Határozd meg azt az a egész számot, amelyre a „ \circ ” művelet asszociatív!

5p c) Igazold, hogy $a = 1$ esetén az f függvény morfizmus a $(\mathbb{Z}, *)$ és (\mathbb{Z}, \circ) csoportok között!