

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x$ függvény.

5p a) Számítsd ki $f'(x)$ -et, ha $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Határozd meg az f függvény szélsőértékpontjait!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{f'(x)}{f(x)} - 1 \right)$ határértéket!

2. Adottak az $f, F: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ és $F(x) = (x+1)\ln x - x + 1$ függvények.

5p a) Igazold, hogy az F függvény az f egy primitív függvénye!

5p b) Számítsd ki az $\int_1^2 f(e^x) dx$ értékét!

5p c) Igazold, hogy $\int_1^2 f(x)F(x)dx = \frac{(3\ln 2 - 1)^2}{2}$.