

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
II. FELADAT (30p)

1. Adott az $A_x = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, mátrix, ahol $x \in \mathbb{R}$ és az $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix. Jelölje $A_x^2 = A_x \cdot A_x$.

5p a) Határozd meg azokat az x valós számokat, amelyekre $\det(A_x) = 0$.

5p b) Határozd meg az x valós számot, ha $A_x^2 = I_2$.

5p c) Igazold, hogy $A_x^2 = 2xA_x + (1 - x^2) \cdot I_2$.

2. Adott a $\mathbb{Z}_3[X]$ polinomgyűrű.

5p a) Határozd meg az $a, b \in \mathbb{Z}_3$ értékeket, ha $\hat{1}$ és $\hat{2}$ az $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^2 + aX + b$ polinom gyökei!

5p b) Számítsd ki az $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$ polinomnak a $g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $g = X + \hat{1}$ polinommal való osztási hányadosát és maradékát!

5p c) Igazold, hogy ha $f \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = (a^3 + \hat{2}a)X^2 + \hat{2}aX + \hat{1}$, akkor $f(\hat{1}) = \hat{2}a + \hat{1}$.