

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**II. FELADAT (30p)**

1. Adottak az  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  és az  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$  mátrixok, ahol  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Legyen  $A^2 = A \cdot A$ .

**5p** a) Számítsd ki az  $A^2$  mátrixot!

**5p** b) Igazold, hogy  $A^2 = aI_2 + bA$ , ahol  $A^2 = A \cdot A$ .

**5p** c) Ha  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$  és  $AX = XA$ , igazold, hogy létezik  $m, n \in \mathbb{Z}$  úgy, hogy  $X = mI_2 + nA$ .

2. Adott az  $f = X^4 + aX^3 - X - 1$  polinom, ahol  $a \in \mathbb{Z}$ .

**5p** a) Határozd meg az  $a$  számot, ha  $x = 1$  gyöke az  $f$  polinomnak!

**5p** b) Ha  $a = 1$ , határozd meg az  $f$  polinom valós gyökeit!

**5p** c) Igazold, hogy  $f(x) \neq 0$ , bármely  $x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ .