

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, bármely $x > 0$ esetén!

5p b) Határozd meg a f függvény grafikus képe ferde aszimptotájának egyenletét!

5p c) Igazold, hogy az f függvény konvex a $(0, +\infty)$ intervallumon!

2. Adottak az $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ és $g(x) = e^x + e^{-x}$ függvények.

5p a) Számítsd ki: $\int f(x) dx$.

5p b) Határozd meg a $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x f(x)$ függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x = 0$ és $x = 1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

5p c) Számítsd ki a g függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!