

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax - 6, & x < 4 \\ \sqrt{x}, & x \geq 4 \end{cases}$ függvény, ahol a valós paraméter.

5p a) Számítsd ki az a valós számot úgy, hogy az f függvény folytonos legyen az $x_0 = 4$ pontban.

5p b) Számítsd ki $f'(9)$ -et!

5p c) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez az $A(9,3)$ pontban húzott érintő egyenletét!

2. Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén értelmezzük az $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$ és $f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$ függvényt.

5p a) Számítsd ki $f_1(x)$ -et, ha $x \in [0, \infty)$.

5p b) Bizonyítsd be, hogy $\int_0^1 f_1(x) \cdot \ln x dx = \frac{e^2 + 1}{4}$.

5p c) Számítsd ki $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f_2(x)$, $x \in [0,1]$ függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!