

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \frac{x^2}{2}$ függvény.

5p a) Számítsd ki $f'(x)$ -et, ha $x \in (0, \infty)$.

5p b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ határértéket!

5p c) Határozd meg az f függvény konvexitási és konkavitási intervallumait!

2. Adott az $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^n$, $n \in \mathbb{Z}^*$ függvény.

5p a) Számítsd ki $n = 2$ esetén az $\int_1^2 f\left(\frac{1}{x}\right) dx$ integrált!

5p b) Határozd meg $n = -1$ esetén az $a \in [0; +\infty)$ számot, ha $\int_0^a f(x) dx = 0$.

5p c) Számítsd ki az $\int_0^1 f'(x)f(x) dx$ értékét!