

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ függvény.

5p a) Számítsd ki: $f'(e)$.

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képe vízszintes aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ felé!

5p c) Bizonyítsd be, hogy $x^e \leq e^x$ bármely $x > 0$ esetén!

2. Adott az $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ függvény.

5p a) Számítsd ki: $\int_0^4 f^2(x) dx$.

5p b) Igazold, hogy $\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \frac{x}{f(x)} dx = 0$.

5p c) Igazold, hogy $0 \leq \int_0^m f(x) dx \leq 8$, bármely $m \in [0, 2]$ esetén!