

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
II. FELADAT (30p)

1. Adott a $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ mártixhalmaz.

5p

a) Igazold, hogy bármely $A, B \in G$ esetén $A + B \in G$.

5p

b) Igazold, hogy ha $C \in G$ az $a = 5$ és $b = 3$ értékekre kapott mátrix, akkor teljesül a

$$C^2 = 10C - 16I_2 \text{ egyenlőség, ahol } C^2 = C \cdot C \text{ és } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5p

c) Adj példát egy olyan $D \in G$ mátrixra, amelyre $\det D = 2008$.

2. Adott az $f \in \mathbb{R}[X]$, $f(X) = (X+1)^{2009} - (X-1)^{2009}$ polinom, amelynek algebrai alakja $f = a_{2009}X^{2009} + a_{2008}X^{2008} + \dots + a_1X + a_0$.

5p

a) Számítsd ki az a_0 értékét!

5p

b) Igazold, hogy $f(1) + f(-1)$ páros egész szám!

5p

c) Határozd meg az f polinom valós gyökeinek számát!