

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{2e^x}{x + e^x}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(x+e^x)^2}$, bármely $x \in [0, +\infty)$ esetén!

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képe vízszintes aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ felé!

5p c) Igazold, hogy $-1 \leq f(x) \leq \frac{1-e}{1+e}$, bármely $x \geq 0$ esetén!

2. Adott az $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx$ integrál, minden $n \in \mathbb{N}^*$ természetes szám esetén.

5p a) Számítsd ki: I_1 .

5p b) Igazold, hogy $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

5p c) Ismert az $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{x+1} \leq x^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1]$ egyenlőtlenség. Esetleg ennek felhasználásával igazold, hogy $\frac{1}{2} \leq 2010 \cdot I_{2009} \leq 1$.