

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$, bármely $x > 0$ esetén!

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez az $A(1;2)$ pontban húzott érintő egyenletét!

5p c) Igazold, hogy $2\sqrt{x} \geq 2 + \ln x$, bármely $x > 0$ esetén!

2. Adottak az $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + (1-x)^n$ függvények, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

5p a) Határozd meg az f_2 függvény primitív függvényeinek halmazát!

5p b) Határozd meg a $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x \cdot f_2(x)$ függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

5p c) Igazold, hogy $\int_0^1 f_n(x) dx \geq \int_0^1 f_{n+1}(x) dx$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!