

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln x$ függvény.

5p a) Számítsd ki $f'(x)$ -et, ha $x \in (0, +\infty)$.

5p b) Határozd meg az f függvény monotonitási intervallumait!

5p c) Igazold, hogy $\sqrt{x} \geq \ln \sqrt{x} + 1$ bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén!

5p 2. a) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (t^2 + t + 1) dt}{x^3 + 1}$ határértéket!

5p b) Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvény. Határozd meg az f függvény azon $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvényét, amelyre $F(1) = 0$.

5p c) Határozd meg azt az a pozitív valós számot, amelyre az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$ függvény grafikus képe az Ox koordinátatengely körüli forgatásával kapott test térfogata 5π .