

**III. FELADAT (30p)**

**1.** Adott az  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x - \ln x}{x + \ln x}$  függvény.

**5p**     **a)** Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  határértéket!

**5p**     **b)** Igazold, hogy  $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{(x + \ln x)^2}$ , bármely  $x \in [1, +\infty)$  esetén!

**5p**     **c)** Határozd meg a  $g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{f'(x)}{(f(x) + 1)^2}$  függvény grafikus képének  $+\infty$  felé mutató aszimptotájának egyenletét!

**2.** Adottak az  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x^2 + 1)$  és  $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$  függvények.

**5p**     **a)** Igazold, hogy  $\int_0^1 f'(x) dx = \ln 2$ .

**5p**     **b)** Bizonyítsd be, hogy  $\int g(x) dx = f(x) + C$ .

**5p**     **c)** Számítsd ki az  $\int_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)} dx$  értékét!