

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 1)e^x - 1$ függvény.

5p

a) Igazold, hogy $f'(x) = (x+1)^2 \cdot e^x$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén!

5p

b) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez a $O(0;0)$ pontban húzott érintő egyenletét!

5p

c) Határozd meg az f függvény grafikus képe $-\infty$ felé mutató aszimptotájának egyenletét!

2. Adottak az $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{\sqrt{x+1}}$ függvények, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

5p

a) Számítsd ki: $\int f_1(x) \cdot \sqrt{x+1} dx$.

5p

b) Számítsd ki az f_1 függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!

5p

c) Igazold, hogy $\int_0^1 f_{2009}(x) \leq \frac{1}{2010}$, felhasználva esetleg, hogy $\sqrt{x+1} \geq 1$, bármely $x \in [0;1]$.