

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}$  függvény.

**5p**

a) Igazold, hogy  $f'(x) = -\frac{2}{x^3} - \frac{2}{(x+1)^3}$ , bármely  $x \in (0, \infty)$  esetén!

**5p**

b) Igazold, hogy az  $f$  függvény csökkenő a  $(0, +\infty)$  intervallumon!

**5p**

c) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 f'(x)$  határértéket!

2. Adott az  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x} + x$  függvény.

**5p**

a) Számítsd ki az  $\int_1^e (f(x) - \frac{\ln x}{x}) dx$  értékét!

**5p**

b) Igazold, hogy  $\int_1^e f(x) dx = \frac{e^2}{2}$ .

**5p**

c) Igazold, hogy az  $I_n = \int_{e^n}^{e^{n+1}} (f(x) - x) dx$ ,  $n \geq 1$  általános taggal meghatározott sorozat egy olyan számtani haladvány, amelynek állandó különbsége 1.