

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x - \ln x$ függvény.

5p a) Számítsd ki $f'(x)$ -et, ha $x \in (0, \infty)$.

5p b) Igazold, hogy az f függvény konvex a $(0, +\infty)$ intervallumon!

5p c) Igazold, hogy $f(x) \geq 0$, bármely $x > 0$ esetén!

2. Adottak az $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (2-x)^n$ függvények, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

5p a) Számítsd ki: $\int f_1(x) dx$, ahol $x \in [0, 2]$.

5p b) Számítsd ki a $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f_1(x) \cdot e^x$ függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x = 0$ és $x = 2$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

5p c) Számítsd ki az f_5 függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!