

**III. FELADAT (30p)**

**1** Adott az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + e^x$  függvény.

**5p**    **a)** Igazold, hogy  $f'(0) = 1$ .

**5p**    **b)** Igazold, hogy az  $f$  függvény konvex az  $\mathbb{R}$ -en!

**5p**    **c)** Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{e^x}$  határértéket!

**2.** Adott az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - x$  függvény.

**5p**    **a)** Igazold, hogy  $\int_0^1 f(x) dx = e - \frac{3}{2}$ .

**5p**    **b)** Számítsd ki az  $\int_0^1 x \cdot f(x) dx$  értékét!

**5p**    **c)** Igazold, hogy ha  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  az  $f$  függvénynek egy primitív függvénye, akkor  
$$\int_e^{e^2} \frac{f(\ln x)}{x} dx = F(2) - F(1).$$