

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - e^{-x}$  függvény.

**5p**

a) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$  határértéket!

**5p**

b) Igazold, hogy az  $f$  függvény növekvő  $\mathbb{R}$ -en!

**5p**

c) Számítsd ki:  $S = g(0) + g(1) + \dots + g(2009)$ , ahol  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f'(x) - f''(x)$ .

2. Adottak az  $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^x$  és  $F(x) = (x-1)e^x$  függvények.

**5p**

a) Igazold, hogy az  $F$  függvény az  $f$  függvénynek egy primitív függvénye!

**5p**

b) Számítsd ki a  $f$  függvény grafikus képe, az  $Ox$  tengely, valamint az  $x=0$  és  $x=1$  egyenesek által határolt síkidom területét!

**5p**

c) Bizonyítsd be, hogy  $\int_1^x \frac{f(t)f''(t) - (f'(t))^2}{f^2(t)} dt = \frac{x+1}{x} - 2$  bármely  $x > 1$  esetén!