

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**  
**II. FELADAT (30p)**

1. Adott a  $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \right\}$  halmaz, valamint a  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  és  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix.

**5p** a) Igazold, hogy  $B^2 = 3B$ , ahol  $B^2 = B \cdot B$ .

**5p** b) Igazold, hogy  $mI_3 + nB \in G$ , bármely  $m, n \in \mathbb{Z}$  esetén!

**5p** c) Igazold, hogy ha  $A \in G$  és  $A^2 = O_3$ , akkor  $A = O_3$ , ahol  $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  és  $A^2 = A \cdot A$ .

2. Adott az  $f = X^4 - 12X^2 + 35$ ,  $f \in \mathbb{R}[X]$  polinom.

**5p** a) Bizonyítsd be, hogy  $f = (X^2 - 6)^2 - 1$ .

**5p** b) Igazold, hogy a polinomnak nincsenek egész gyökei!

**5p** c) Bontsd fel a polinomot irreducibilis tényezők szorzatára az  $\mathbb{R}[X]$  halmazon!