

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
II. FELADAT (30p)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok, és a $G = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}$

halmaz.

5p a) Számítsd ki a $\det A$ determinánst!

5p b) Igazold, hogy $A^2 X = X A^2$, bármely $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ esetén, ahol $A^2 = A \cdot A$.

5p c) Igazold, hogy ha $a, b \in \mathbb{R}$, akkor az $aI_3 + bA \in G$.

2. Adott az $f = (1 + X + X^2)^{1004} + X^{2009}$ polinom, amelynek algebrai alakja

$$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_{2009} X^{2009}$$

5p a) Számítsd ki az $f(-1)$ értéket!

5p b) Igazold, hogy $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2009}$ páros egész szám!

5p c) Számítsd ki az f polinomnak az $X^2 - 1$ polinommal való osztási maradékát!