

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{2009} - 2009(x-1) - 1$  függvény.

**5p** a) Számítsd ki az  $f(0) + f'(0)$  összeget!

**5p** b) Határozd meg az  $f$  függvény grafikus képéhez az  $A(0;1)$  pontban húzott érintő egyenletét!

**5p** c) Igazold, hogy az  $f$  függvény konvex a  $[0, +\infty)$  intervallumon!

2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + e^{-x}$  függvény.

**5p** a) Számítsd ki az  $f$  függvény grafikus képe, az  $Ox$  koordinátatengely, valamint az  $x=0$  és  $x=1$  egyenesek által határolt síkidom területét!

**5p** b) Ismertnek tekintjük az  $x^2 + e^{-x^2} \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$  egyenlőtlenséget. Ennek felhasználásával igazold,

hogy  $\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \frac{2}{3}$ .

**5p** c) Számítsd ki a  $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x) + f(-x)$  függvény grafikus képének  $Ox$  koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!