

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2}$  függvény.

5p a) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  határértéket!

5p b) Igazold, hogy  $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$ , bármely  $x \geq 0$  esetén!

5p c) Bizonyítsd be, hogy  $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 2$  bármely  $x \in [0, +\infty)$  esetén!

2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + e^x + 1$  függvény.

5p a) Igazold, hogy az  $f$  függvény bármely primitív függvénye növekvő  $\mathbb{R}$ -en.

5p b) Számítsd ki:  $\int_0^1 x f(x) dx$ .

5p c) Igazold, hogy  $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx = e + \frac{1}{3}$ .