

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x(ax^2 + bx + c)$  függvény, ahol  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

5p a) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  határértéket, ha  $a = 1$ ,  $b = c = 0$ .

5p b) Igazold, hogy  $f'(0) - f(0) = b$ .

5p c) Határozd meg az  $a, b, c \in \mathbb{R}$  számokat, ha  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$  és  $f''(0) = 4$ .

2. Adottak az  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx$  integrálok, ahol  $n \in \mathbb{N}^*$ .

5p a) Számítsd ki az  $I_1$  integrált!

5p b) Igazold, hogy  $I_2 \leq I_1$ , felhasználva esetleg, hogy  $x^2 \leq x$ , bármely  $x \in [0, 1]$  esetén!

5p c) Bizonyítsd be, hogy  $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1} + 2\ln 2$ , bármely  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén!