

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \geq 1 \\ -x^2 + x, & x < 1 \end{cases}$ függvény.

5p a) Tanulmányozd az f függvény folytonosságát az $x_0 = 1$ pontban!

5p b) Számítsd ki az $f'(0) + f'(2)$ összeget!

5p c) Igazold, hogy az f függvény konkáv a $(-\infty; 1)$ intervallumon!

2. Adottak az $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x}$ és $g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^x}$ függvények.

5p a) Igazold, hogy a g függvény az f függvénynek egy primitív függvénye!

5p b) Számítsd ki: $\int_0^1 f(x)g(x) dx$.

5p c) Igazold, hogy $\int_0^1 f'(x)g'(x)dx = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.