

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ függvény.

5p a) Számítsd ki $f'(x)$ -et, ha $x \in \mathbb{R}^*$.

5p b) Bizonyítsd be, hogy az f függvény csökkenő a $(0, 2]$ intervallumon!

5p c) Igazold, hogy $2e^{\sqrt{3}} \leq 3e^{\sqrt{2}}$.

2. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - x$ függvény.

5p a) Számítsd ki az $\int_1^2 (x - f(x) + \ln x)^2 dx$ értékét!

5p b) Igazold, hogy az f függvény bármely F primitív függvénye konkáv az $(1, +\infty)$ intervallumon!

5p c) Számítsd ki a $h: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) + x$ függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x=1$ és $x=e$ egyenesek által határolt síkidom területét!