

**III. FELADAT (30p)**

**1.** Adott az  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 \ln x$  függvény.

**5p**    **a)** Igazold, hogy  $f'(x) = x(2 \ln x + 1)$ , bármely  $x \in (0, +\infty)$  esetén!

**5p**    **b)** Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x \ln x}$  határértéket!

**5p**    **c)** Bizonyítsd be, hogy  $f(x) \geq -\frac{1}{2e}$ , bármely  $x > 0$  esetén!

**2.** Adott az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^x$  függvény.

**5p**    **a)** Számítsd ki:  $\int_0^1 f(x) e^{-x} dx$ .

**5p**    **b)** Igazold, hogy  $\int_0^1 f''(x) dx = 2e - 1$ .

**5p**    **c)** Számítsd ki  $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx$ .