

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$  függvény.

5p a) Számítsd ki  $f'(x)$ -et, ha  $x \in (1; +\infty)$ .

5p b) Igazold, hogy az  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -1$ .

5p c) Igazold, hogy az  $f$  függvény csökkenő az  $(1, +\infty)$  intervallumon!

2. Adottak az  $f, g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{x}$  és  $g(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln x$  függvények.

5p a) Igazold, hogy  $\int_1^4 f(x) dx = \ln 4 + 2$ .

5p b) Igazold, hogy  $\int_1^4 g(x) dx = \ln 4 - \frac{3}{4}$ .

5p c) Számítsd ki:  $\int_1^e f(x^2) \cdot g(x^2) dx$ .