

**III. FELADAT (30p)**

**1.** Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^{2010} + 2010^x$  függvény.

**5p**     **a)** Határozd meg  $f'(x)$ -et, ha  $x \in \mathbb{R}$ .

**5p**     **b)** Igazold, hogy az  $f$  függvény konvex az  $\mathbb{R}$ -en.

**5p**     **c)** Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x}$  határértéket!

**2.** Adottak az  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)}$  és  $g(x) = \frac{1}{x}$  függvények.

**5p**     **a)** Igazold, hogy  $\int_1^e g(x) dx = 1$ .

**5p**     **b)** Számítsd ki az  $\int_1^e f(x) dx$  értékét, felhasználva az  $f(x) = g(x) - \frac{x}{x^2 + 1}$ ,  $\forall x > 0$  azonosságot!

**5p**     **c)** Igazold, hogy  $\ln \frac{e^2 + 1}{2} \geq \frac{e + 1}{e}$ , felhasználva az  $f(x) \leq \frac{1}{2x^2}$  egyenlőtlenséget, mely igaz bármely  $x \in [1, e]$  esetén!