

III. FELADAT (30p)

1. Adottak az $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)e^x$ és $g(x) = xe^x$ függvények.

5p **a)** Igazold, hogy $f'(x) = g(x)$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén!

5p **b)** Határozd meg a g függvény grafikus képe $-\infty$ felé mutató aszimptotájának egyenletét!

5p **c)** Ha $I \subseteq \mathbb{R}$ egy intervallum, akkor igazold, hogy a g függvény akkor és csak akkor növekvő az I intervallumon, ha az f függvény konvex az I intervallumon!

2. Adottak az $f, g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ és $g(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ függvények.

5p **a)** Igazold, hogy f egy primitív függvénye az g függvénynek!

5p **b)** Számítsd ki az $\int_1^e f(x) \cdot g(x) dx$ értékét!

5p **c)** Határozd meg az $a \in (1; +\infty)$ valós számot, ha $\int_1^a f(x) dx = 2$.