

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1}, & x \leq 0 \\ -2x+1, & x > 0 \end{cases}$ függvény.

5p a) Tanulmányozd az f függvény folytonosságát az $x_0 = 0$ pontban!

5p b) Igazold, hogy az f függvény növekvő a $(-\infty, 0)$ intervallumon!

5p c) Határozd meg az f függvény grafikus képhez az $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ pontban húzott érintő egyenletét!

2. Adottak az $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}$ függvények, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

5p a) Igazold, hogy $\int_1^e f_1(\sqrt{x-1}) dx = 1$.

5p b) Határozd meg a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f_2(x)}$ függvény azon G primitív függvényét, amelyre teljesül

a $G(1) = \frac{13}{15}$ egyenlőség!

5p c) Számítsd ki az $\int_0^1 x \cdot f_n(x) dx$ értékét $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ esetén!