

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$  függvény.

5p a) Igazold, hogy  $f'(x) - \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0$ , bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén!

5p b) Határozd meg a  $f$  függvény grafikus képe  $+\infty$  felé mutató aszimptotájának egyenletét!

5p c) Igazold, hogy  $f(\sqrt[3]{2008}) \leq f(\sqrt[3]{2009})$ .

2. Adottak az  $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2^x$  és  $g(x) = x \cdot 2^x$  függvények.

5p a) Számítsd ki:  $\int f(x) dx$ .

5p b) Határozd meg a  $g$  függvény grafikus képe, az  $Ox$  koordinátatengely, valamint az  $x=0$  és  $x=1$  egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

5p c) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$  határértéket!