

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2^x + 3^x$  függvény.

**5p** a) Számítsd ki  $f'(x)$ -et, ha  $x \in \mathbb{R}$ .

**5p** b) Határozd meg az  $f$  függvény aszimptotáját a  $-\infty$  felé!

**5p** c) Igazold, hogy az  $f$  függvény konvex  $\mathbb{R}$ -en!

2. Adottak az  $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = \frac{x^n}{x+1}$  függvények, bármely  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén.

**5p** a) Számítsd ki:  $\int_1^{\frac{1}{2}} (x+1) \cdot f_2(x) dx$ .

**5p** b) Határozd meg az  $f_1$  függvény grafikus képe, az  $Ox$  koordinátatengely, valamint az  $x=0$  és  $x=1$  egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét.

**5p** c) Igazold, hogy  $\int_0^1 f_{2009}(x) dx \leq \ln 2$ .