

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{e^x}$  függvény.

**5p** a) Igazold, hogy  $f'(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{e^x}$ , bármely  $x \in \mathbb{R}$  esetén!

**5p** b) Határozd meg az  $f$  függvény grafikus képe  $+\infty$  felé mutató vízszintes aszimptotájának egyenletét!

**5p** c) Igazold, hogy  $f(x) \geq \frac{1}{e}$  bármely  $x \leq 2$  esetén!

2. Adott az  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x+2}$  függvény.

**5p** a) Számítsd ki:  $\int f^2(x) dx$ .

**5p** b) Határozd meg az  $f$  függvény grafikus képe, az  $Ox$  koordinátatengely, valamint az  $x=0$  és  $x=1$  egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

**5p** c) Igazold, hogy  $\int_0^1 x^{2009} f(x) dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2010}$ , felhasználva esetleg, hogy  $\sqrt{x+2} \leq \sqrt{3}$  bármely  $x \in [0,1]$ .