

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  függvény.

5p a) Igazold, hogy  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ , bármely  $x > 0$  esetén!

5p b) Határozd meg az  $f$  függvény grafikus képéhez az  $A\left(e, \frac{1}{e}\right)$  pontban húzott érintő egyenletét!

5p c) Igazold, hogy  $\ln x \leq \frac{x}{e}$ , bármely  $x > 0$  esetén!

2. Adott az  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - \sqrt{x}$  függvény.

5p a) Határozd meg az  $f$  függvény primitív függvényeinek halmazát!

5p b) Számítsd ki az  $f$  függvény grafikus képének  $Ox$  koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!

5p c) Igazold hogy  $\int_0^1 f^{2009}(x) dx \leq \frac{1}{2010}$ , felhasználva esetleg, hogy  $\sqrt{x} \geq x$ , bármely  $x \in [0, 1]$ .