

**III. FELADAT (30p)**

**1.** Adott az  $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$  függvény.

**5p**    **a)** Igazold, hogy  $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ , bármely  $x > 1$  esetén.

**5p**    **b)** Határozd meg az  $f$  függvény grafikus képe  $+\infty$  felé mutató ferde aszimptotájának egyenletét!

**5p**    **c)** Igazold, hogy  $f(\sqrt[3]{2}) \geq f(\sqrt[3]{3})$ .

**2.** Adottak az  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - x$  és  $g(x) = \sqrt{1-x}$  függvények.

**5p**    **a)** Számítsd ki:  $\int f(x) dx$ .

**5p**    **b)** Számítsd ki a  $g$  függvény grafikus képe, az  $Ox$  koordinátatengely, valamint az  $x=0$  és  $x=1$  egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

**5p**    **c)** Számítsd ki az  $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) \cdot \ln x dx$  értékét!