

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  függvény.

**5p** a) Igazold, hogy  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ , bármely  $x > 0$  esetén!

**5p** b) Határozd meg a  $f$  függvény grafikus képe  $+\infty$  felé mutató vízszintes aszimptotájának egyenletét!

**5p** c) Igazold, hogy  $f(2008) \geq f(2009)$ .

2. Adott az  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$  függvény.

**5p** a) Számítsd ki:  $\int f(x) dx$ .

**5p** b) Számítsd ki a  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{f^2(x)}{x^2 + 1}$  függvény grafikus képe, az  $Ox$  koordinátatengely, valamint az  $x = 0$  és  $x = 1$  egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

**5p** c) Számítsd ki a  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot f(x)$ ,  $x \in [0, 1]$  függvény grafikus képének  $Ox$  koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogatát!