

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2 - 3\sqrt[3]{x}$ függvényt.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, bármely $x > 0$ esetén!

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képéhez az $A(1;0)$ pontban húzott érintő egyenletét!

5p c) Igazold, hogy $\frac{x+2}{3} \geq \sqrt[3]{x}$, bármely $x > 0$ esetén!

2. Adott az $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$ függvény.

5p a) Számítsd ki: $\int_0^1 (x+1) \cdot f(x) dx$.

5p b) Számítsd ki az f függvény grafikus képe, az Ox koordinátatengely, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

5p c) Igazold, hogy az f függvény grafikus képének Ox koordinátatengely körüli forgatása által meghatározott forgástest térfogata a $\left[\frac{\pi}{28}, \frac{\pi}{7}\right]$ intervallumban lévő szám, felhasználva, hogy $1 \leq (x+1)^2 \leq 4$ bármely $x \in [0,1]$ esetén!