

**III. FELADAT (30p)**

- 5p** 1. Adott az  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$  függvény.
- 5p** a) Igazold, hogy az  $(x_n)_{n \geq 1}$  sorozat divergens, ahol  $x_n = f(1) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ .
- 5p** b) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  határértéket!
- 5p** c) Igazold, hogy az  $f$  csökkenő függvény!
- 5p** 2. Adott az  $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$  függvény.
- 5p** a) Számítsd ki  $f(2)$  értékét!
- 5p** b) Igazold, hogy  $f(x) \leq \frac{1}{x}$ ,  $\forall x > 1$  esetén!
- 5p** c) Igazold, hogy  $f(x+1) = x \cdot f(x) - \frac{1}{e}$ ,  $\forall x > 1$  esetén!