

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \arctg x - \ln(1+x^2)$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f konvex függvény \mathbb{R} -en!

5p b) Igazold, hogy az f' függvény korlátos!

5p c) Igazold, hogy $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén!

2. Adott az $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ sorozat.

5p a) Számítsd ki I_1 értékét!

5p b) Igazold, hogy: $I_n(1) \leq \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ határértéket!