

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$ függvény.

5p

a) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^4}$ határértéket!

5p

b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{\frac{1}{x}}$ határértéket!

5p

c) Igazold, hogy az $f'(x) = 0$ egyenletnek pontosan három valós megoldása van!

2. Adottak az $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$ függvények.

5p

a) Számítsd ki a f_1 függvény grafikus képe, a koordináta-rendszer tengelyei valamint az $x = 1$ egyenletű egyenes által határolt síkidom területét!

5p

b) Számítsd ki az $\int_0^1 x(f_1(x))^2 dx$ értékét!

5p

c) Igazold, hogy: $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f_n(1) + f_n(2) + f_n(3) + \dots + f_n(n)) = \frac{\pi}{4}$.