

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ és a $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ mátrixok.

5p a) Igazold, hogy az $AX = B$ egyenletnek végtelen sok $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ megoldása van!

5p b) Igazold, hogy $A^3 = 10A$.

5p c) Határozd meg az A^* mátrix rangját (A^* az A adjungált mátrixa).

2. Adott a $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmaz, az $f : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$,
 $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ függvény és az $A = \{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \mid f(x) = -1\}$ halmaz.

5p a) Igazold, hogy $7 + 5\sqrt{2} \in A$.

5p b) Igazold, hogy bármely $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ esetén teljesül az $f(xy) = f(x)f(y)$ egyenlőség!

5p c) Igazold, hogy az A halmaz végtelen sok elemet tartalmaz!