

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott az
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ a^3x + b^3y + c^3z = 1 \end{cases}$$
 egyenletrendszer, $a, b, c \in \mathbb{R}$ páronként különböző számok és

A a rendszer mátrixa.

5p a) Igazold, hogy $\det(A) = (a+b+c)(c-b)(c-a)(b-a)$.

5p b) Oldd meg a rendszert $a+b+c \neq 0$ esetben!

5p c) Ha $a+b+c=0$, igazold, hogy a rendszer inkompatibilis!

2. Adott az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_0 = 0$ és $a_{n+1} = a_n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}$ sorozat és az

$f \in \mathbb{R}[X]$ polinom, amelyre $f(0) = 0$ és $f(x^2 + 1) = (f(x))^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén.

5p a) Számítsd ki $f(5)$ értékét!

5p b) Igazold, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $f(a_n) = a_n$.

5p c) Igazold, hogy $f = X$.