

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ függvény és az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat úgy,

$$\text{hogy } x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

5p a) Határozd meg az f függvény grafikus képének aszimptotáit!

5p b) Igazold, hogy bármely $k > 0$ esetén $\frac{1}{k+1} < f(k+1) - f(k) < \frac{1}{k}$.

5p c) Igazold, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat csökkenő és minden tagja pozitív!

2. Adottak az $f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$ és $F : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = a \ln(x+1) + b \ln(x^2+1) + c \arctg x \text{ függvények, ahol } a, b, c \text{ valós paraméterek.}$$

5p a) Határozd meg az $a, b, c \in \mathbb{R}$ értékeket úgy, hogy a F függvény az f egy primitív függvénye legyen!

5p b) Számítsd ki $\int_0^1 f(x) dx$ értékét!

5p c) Ha F az f egy primitív függvénye, tanulmányozd az F függvény monotonitását!