

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott az $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$ halmaz és az $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix.

5p a) Ha $Y \in M_2(\mathbb{Z})$ és $AY = YA$, igazold, hogy $Y \in M$.

5p b) Ha $X \in M$ és $\det X = 0$, igazold, hogy $X = O_2$.

5p c) Igazold, hogy $A^n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

2. Adott az $f = X^5 - X^4 + 3X^3 - X^2 - 2 \in \mathbb{C}[X]$ polinom.

5p a) Határozd meg az f polinom egy egész gyökét!

5p b) Számítsd ki az $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2$ összeg értékét, ahol x_1, x_2, \dots, x_5 az f polinom gyökei.

5p c) Igazold, hogy az f polinomnak egyetlen valós gyöke van!