

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \operatorname{arctg} x$  függvény

és az  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sorozat úgy, hogy  $x_1 = 1$  és  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

- 5p a) Igazold, hogy az  $f'$  függvény szigorúan növekvő  $\mathbb{R}$ -en!
- 5p b) Határozd meg az  $f$  függvény grafikus képének aszimptotáját  $-\infty$ -ben!
- 5p c) Igazold, hogy az  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sorozat konvergens!

2. Adott az  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sorozat, ahol  $I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n dx$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

- 5p a) Számítsd ki  $I_2$  értékét!
- 5p b) Igazold, hogy  $I_n = \frac{n}{4n+2} I_{n-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .
- 5p c) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  határértéket!