

**Ministerul Educatiei, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Adottak az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \arctg x$  és  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = f(x+1) - f(x) - f\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$  függvények.

5p a) Igazold, hogy az  $f$  függvény grafikus képének van aszimptotája  $+\infty$ -ben!

5p b) Igazold, hogy  $g(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  esetén!

5p c) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \arctg \frac{1}{1+1+1^2} + \arctg \frac{1}{1+2+2^2} + \arctg \frac{1}{1+3+3^2} + \dots + \arctg \frac{1}{1+n+n^2} \right)$  határértéket!

2. Legyen  $I_n = \int_0^1 e^{-x} x^n dx$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

5p a) Számítsd ki  $I_1$  értékét!

5p b) Igazold, hogy  $I_n = nI_{n-1} - \frac{1}{e}$  bármely  $n \geq 2$  esetén!

5p c) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  határértéket!