

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + \cos x$  függvény és az  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $x_0 = 0$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  sorozat.

**5p** a) Igazold, hogy az  $f$  függvény növekvő az  $\mathbb{R}$ -en!

**5p** b) Igazold, hogy  $0 \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  esetén!

**5p** c) Igazold, hogy az  $(x_n)_{n \geq 1}$  sorozat konvergens és határértéke  $\frac{\pi}{2}$ .

2. Adott az  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  valós számsorozat úgy, hogy  $I_0 = \frac{\pi}{2}$  és  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**5p** a) Számítsd ki  $I_1$  értékét!

**5p** b) Igazold, hogy az  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sorozat csökkenő!

**5p** c) Igazold, hogy  $n I_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  esetén!