

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Az $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix és az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok teljesítik az

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \text{ egyenlőséget } \forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

5p a) Igazold, hogy $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (a^2 + b^2)(x_n^2 + y_n^2), \forall n \in \mathbb{N}$ esetén!

5p b) Ha $a^2 + b^2 \leq 1$, igazold, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatok korlátosak!

5p c) Ha $a = 1$ és $b = \sqrt{3}$, igazold, hogy $x_{n+6} = 64x_n, \forall n \geq 0$ esetén!

2. Adott a $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ test.

5p a) Igazold, hogy az $x^2 = \hat{8}$ egyenletnek nincs megoldása a \mathbb{Z}_{11} halmazban!

5p b) Határozd meg a $\mathbb{Z}_{11}[X]$ halmazban levő másodfokú polinomok számát!

5p c) Igazold, hogy az $X^2 + X + \hat{1}$ polinom irreducibilis a $\mathbb{Z}_{11}[X]$ -ben!