

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009**

**II. FELADAT (30p)**

1. Tetszőleges  $A \in M_2(\mathbb{C})$  mátrix esetén legyen  $C(A) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$ .

Adottak az  $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  mátrixok.

**5p** a) Ha  $X, Y \in C(A)$ , igazold, hogy  $X + Y \in C(A)$ .

**5p** b) Ha  $E_1, E_2 \in C(A)$ , igazold, hogy létezik olyan  $\alpha \in \mathbb{C}$  szám amelyre  $A = \alpha I_2$ .

**5p** c) Ha a  $C(A)$  halmaz tartalmaz három mátrixot az  $E_1, E_2, E_3, E_4$  mátrixok közül, igazold, hogy akkor a negyedik mátrixot is tartalmazza!

2. Legyen  $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$  két permutáció az  $(S_5, \cdot)$  csoportból.

**5p** a) Oldd meg az  $S_5$  halmazban az  $ax = b$  egyenletet!

**5p** b) Határozd meg az  $ab$  elem rendjét az  $(S_5, \cdot)$  csoportban!

**5p** c) Legyen  $k \in \mathbb{Z}$  úgy, hogy  $b^k = e$ . Igazold, hogy a  $k$  szám osztható hattal!