

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009**

**II. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  mátrix.
- 5p a) Igazold, hogy létezik  $a \in \mathbb{R}$  úgy, hogy teljesüljön az  $A^2 = aA$  egyenlőség!
- 5p b) Számítsd ki az  $(A - A^t)^{2009}$  mátrixot!
- 5p c) Oldd meg az  $X^5 = A$ ,  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  egyenletet!
2. Az  $M = [0, \infty)$  halmazon értelmezzük az  $a * b = \ln(e^a + e^b - 1)$  műveletet,  $a, b \in M$ .
- 5p a) Ha  $a, b \in M$ , igazold, hogy  $a * b \in M$ .
- 5p b) Igazold, hogy a „ $*$ ” művelet asszociatív!
- 5p c) Ha  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , határozd meg  $a \in M$  értékét úgy, hogy  $\underbrace{a * a * \dots * a}_{n \text{ darab } a} = 2a$ .