

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009**

**II. FELADAT (30p)**

1. Adottak az  $f, g \in \mathbb{R}[X]$  polinomok,  $f = X^2 + X + 1$  és gyökei az  $x_1, x_2$  komplex számok,

$g = aX^2 + bX + c$ ,  $a \neq 0$ , valamint az  $A, V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  mátrixok,  $A = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$ ,  $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}$ .

5p a) Igazold, hogy  $\det(V) = 3(x_2 - x_1)$ .

5p b) Igazold, hogy  $A \cdot V = \begin{pmatrix} g(1) & g(x_1) & g(x_2) \\ g(1) & x_1 g(x_1) & x_2 g(x_2) \\ g(1) & x_1^2 g(x_1) & x_2^2 g(x_2) \end{pmatrix}$ .

5p c) Igazold, hogy  $\det(A) = 0$  akkor és csakis akkor, ha  $a + b + c = 0$  vagy  $a = b = c$ .

2. Adott az  $f: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$ ,  $f(x) = x^4 + 4x$  függvény.

5p a) Számítsd ki az  $f(\hat{0})$  és az  $f(\hat{1})$  értékeket!

5p b) Igazold, hogy az  $f$  függvény nem szürjektív!

5p c) Bontsd fel irreducibilis tényezőkre szorzatára  $\mathbb{Z}_5$  felett az  $X^4 + 4X \in \mathbb{Z}_5[X]$  polinomot!