

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok.

5p a) Számítsd ki az $AB + BA$ mátrixot!

5p b) Igazold, hogy $\text{rang}(A + B) = \text{rang } A + \text{rang } B$.

5p c) Igazold, hogy $(A + B)^n = A^n + B^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

2. Az $f = X^4 + aX^3 + 4X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ polinom gyökei $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p a) Határozd meg az $a \in \mathbb{C}$ értékét úgy, hogy az f polinom osztható legyen az $X + 1$ polinommal!

5p b) Igazold, hogy a $g = X^4 + 4X^2 + aX + 1$ polinom gyökei $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}$.

5p c) Igazold, hogy tetszőleges $a \in \mathbb{C}$ esetén az f polinom gyökei nem mind valósak!