

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009**

**II. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $(F_n)_{n \geq 0}$ ,  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  sorozat és az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  mátrix.

5p a) Igazold, hogy  $A^2 = A + I_2$ .

5p b) Ha  $X \in M_2(\mathbb{Q})$ ,  $X \neq O_2$  és  $AX = XA$ , igazold, hogy az  $X$  mátrix invertálható!

5p c) Igazold, hogy  $A^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$ ,  $\forall n \geq 1$  esetén!

2. Adottak a  $\sigma, \pi \in S_5$ ,  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$  permutációk.

5p a) Igazold, hogy  $\sigma\pi \neq \pi\sigma$ .

5p b) Határozd meg a  $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$  halmaz elemeinek számát!

5p c) Igazold, hogy  $H = \{\pi^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$  részcsoportha az  $(S_5, \cdot)$  csoportnak!