

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott a
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z - 5t = -1 \\ x + 9y + mz + t = 3 \\ 5x - 6y + 10z + nt = p \end{cases}$$
 egyenletrendszer, $m, n, p \in \mathbb{R}$.

- 5p** a) Határozd meg p értékét úgy, hogy a rendszernek olyan (x_0, y_0, z_0, t_0) megoldása legyen, amelyre $z_0 = t_0 = 0$.
- 5p** b) Igazold, hogy bármely $m, n \in \mathbb{R}$ esetén a rendszer mátrixának rangja nagyobb, vagy egyenlő mint 2.
- 5p** c) Határozd meg $m, n, p \in \mathbb{R}$ azon értékeit, amelyekre a rendszer kompatibilis és a rendszer mátrixának rangja 2.
2. Adottak a $Q_0 = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, m, n \text{ páratlanszámok} \right\}$ és $G = Q_0 \times \mathbb{Z}$ halmazok. A G halmazon értelmezzük a $(q_1, k_1) * (q_2, k_2) = (q_1 q_2, k_1 + k_2)$, $\forall q_1, q_2 \in Q_0, \forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ műveletet.
- 5p** a) Igazold, hogy a $(G, *)$ struktúra kommutatív csoport!
- 5p** b) Számítsd ki az $(1, 1) * (1, 2) * \dots * (1, 10)$ értéket!
- 5p** c) Igazold, hogy az $f : G \rightarrow \mathbb{Q}^*$, $f((q, k)) = q \cdot 2^k$ egy izomorfizmus a $(G, *)$ és (\mathbb{Q}^*, \cdot) csoportok között!