

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009**

**II. FELADAT (30p)**

1. Legyen  $M$  azon valós számokból álló harmadrendű négyzetes mátrixok halmaza, amelyekben minden sor elemeinek összege zéró.

**5p** a) Ha  $A, B \in M$ , igazold, hogy  $A + B \in M$ .

**5p** b) Igazold, hogy az  $M$  halmaz egyetlen mátrixa sem invertálható!

**5p** c) Ha  $A \in M$ , igazold, hogy  $A^2 \in M$ .

2. Adottak a  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  és  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  gyűrűk.

**5p** a) Ha  $x \in \mathbb{R}$  és  $x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$ , igazold, hogy  $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ .

**5p** b) Igazold, hogy  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \cap \mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \mathbb{Z}$

**5p** c) Bizonyítsd be, hogy nem létezik gyűrűmorfizmus a  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$  és  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  gyűrűk között!