

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott az $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$ mátrix.

5p a) Igazold, hogy $(I_2 + A)^2 = I_2 + A$.

5p b) Igazold, hogy az $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ véges halmaz!

5p c) Oldd meg az $X^3 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ egyenletet!

2. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ és az $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$ polinom.

5p a) Igazold, hogy $f(1) + f(-1)$ páros szám!

5p b) Ha $f(2)$ és $f(3)$ páratlan számok, igazold, hogy az f polinomnak nincsenek egész gyökei!

5p c) Igazold, hogy a $g = X^3 - X + 3a + 1$ polinom nem bontható fel két egész együtthatós, nem állandó polinom szorzatára!