

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat, amelyben $a_1 \in (0,1)$ és $a_{n+1} = a_n(1 - \sqrt{a_n})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Igazold, hogy $a_n \in (0,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

5p b) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat szigorúan csökkenő!

5p c) Ha $b_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, igazold, hogy a_1 a $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat egy felső korlátja!

2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy a $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ függvény az f egy primitív függvénye!

5p b) Határozd meg a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (2x+1)f(x)$ függvény grafikus képe, az Ox tengely valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenesek által határolt területet!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x) dx$ határértéket, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.