

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+2} e^{|x|}$ függvény.

- 5p** a) Tanulmányozd az f függvény deriválhatóságát az $x_0 = 0$ pontban!
5p b) Határozd meg az f függvény helyi szélsőérték-pontjait!
5p c) Határozd meg az $f(x) = m$ egyenlet gyökeinek számát, az m valós paraméter függvényében!

2. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ függvény, amelyről tudjuk,

hogy $f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 0$ esetén, valamint a $g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_x^1 \frac{\sin t}{t} dt$ függvény.

- 5p** a) Számítsd ki $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ értékét!
5p b) Igazold, hogy a g függvény szigorúan csökkenő!
5p c) Igazold, hogy: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) > 0,9$.