

**III. FELADAT (30p)**

- 1.** Adott az  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sin^n x$  függvény, ahol  $n \in \mathbb{N}^*$  és  $n \geq 3$ . Jelölje  $x_n$  az  $f_n$  függvény grafikus képe inflexiós pontjainak abszcisszái közül azt, amely a  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  intervallumban van.
- 5p** a) Igazold, hogy  $\forall x \in \mathbb{R}$  esetén  $f_n''(x) = n(n-1)\sin^{n-2}x - n^2\sin^n x, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$ .
- 5p** b) Igazold, hogy  $\sin x_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}, \forall n \geq 2$ .
- 5p** c) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$  határértéket!
- 2.** Adottak az  $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 - 3x + a}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}, F(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$  függvények, ahol  $a \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Igazold, hogy az  $F$  függvény az  $f$  függvény egy primitív függvénye!
- 5p** b) Ha  $a = 2$ , számítsd ki az  $f$  függvény grafikus képe, az  $Ox$  tengely, valamint az  $x = 1$  és  $x = 2$  egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!
- 5p** c) Határozd meg  $a$  értékét úgy, hogy  $\int_0^2 F(x)dx - \int_{-2}^0 F(x)dx = 2$  legyen!