

III. TÉTEL (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f függvény deriválható az \mathbb{R} -en!

5p b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$ határértéket!

5p c) Igazold, hogy az f függvény korlátos az \mathbb{R} -en!

2. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^*$ esetén adott az $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (1-x)^n$ függvény.

5p a) Számítsd ki $\int_0^1 f_2(x) dx$ értékét!

5p b) Igazold, hogy $\int_0^1 x \cdot f_n(x) dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n\left(\frac{x}{n}\right) dx$ határértéket!