

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2e^x + 3x^2 - 2x + 5$  függvény.

**5p** a) Igazold, hogy az  $f$  függvény szigorúan növekvő a  $[0, \infty)$  intervallumon!

**5p** b) Igazold, hogy az  $f$  függvény nem szürjektív!

**5p** c) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$  határértéket!

2. Adott az  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+t^3)}$  függvény.

**5p** a) Számítsd ki az  $\int_0^1 (t^3 + 1)f(t)dt$  értékét!

**5p** b) Igazold, hogy  $\int_{\frac{1}{x}}^1 f(t)dt = \int_1^x t^3 f(t)dt$ ,  $\forall x > 0$ .

**5p** c) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{x}}^x f(t)dt$  határértéket!