

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x$ függvény.

5p

a) Igazold, hogy f szigorúan növekvő függvény!

5p

b). Igazold, hogy az f függvény grafikus képének nincs aszimptotája!

5p

c) Igazold, hogy a $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ függvény deriválható \mathbb{R} -en!

2. Adott az $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ függvény.

5p

a) Igazold, hogy az f függvénynek van primitív függvénye a $[0, \infty)$ intervallumon!

5p

b) Számítsd ki az $\int_0^1 x \cdot f(x) dx$ értékét!

5p

c) Felhasználva esetleg az $e^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ egyenlőtlenséget igazold, hogy

$$0 \leq \int_0^x f(t) dt < 1, \forall x > 0 \text{ esetén!}$$