

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$ függvény.

5p a) Igazold, hogy a függvény konvex a $(0, e]$ intervallumon!

5p b) Határozd meg a függvény grafikus képének aszimptotáit!

5p c) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \geq 3}$, $a_n = \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 5}{5} + \dots + \frac{\ln n}{n} - f(n)$ sorozat csökkenő!

2. Adott az $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ függvény.

5p a) Számítsd ki az f függvény grafikus képe és a koordinátatengelyek által határolt síkidom területét!

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képének Ox tengely körüli forgatásával keletkező forgástest térfogatát!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$ határértéket!