

**Ministerul Educatiei, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x-1)\arcsin x$  függvény.

**5p**     a) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 - x}$  határértéket!

**5p**     b) Határozd meg azokat a pontokat, amelyekben a függvény nem deriválható!

**5p**     c) Igazold, hogy az  $f$  függvény konvex!

2. Adottak az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

és az  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  függvények.

**5p**     a) Igazold, hogy az  $F$  függvény szigorúan növekvő  $\mathbb{R}$ -en!

**5p**     b) Igazold, hogy az  $F$  függvény bijektív!

**5p**     c) Számítsd ki az  $\int_0^a F^{-1}(x) dx$  határozott integrál értékét,

ha  $F^{-1}$  az  $F$  függvény inverz függvénye és  $a = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ .