

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Adottak az  $f_n, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1} + x^{2n}$ ,  $g_n(x) = x^{2n+1} + 1$  függvények, ahol  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**5p** a) Igazold, hogy  $f'_n(x) = \frac{g'_n(x)}{x+1} - \frac{g_n(x)}{(x+1)^2}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  esetén!

**5p** b) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n\left(\frac{1}{2}\right)$  határértéket!

**5p** c) Igazold, hogy az  $f_n$  függvénynek pontosan egy helyi szélsőérték-pontja van!

2. Adott az  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sorozat, ahol  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3} dx$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**5p** a) Számítsd ki  $I_2$  értékét!

**5p** b) Igazold, hogy az  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  szigorúan csökkenő sorozat!

**5p** c) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  határértéket!