

**Ministerul Educatiei, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^3 - 3x + 3\arctg x$  függvény.

**5p** a) Igazold, hogy az  $f$  függvény szigorúan növekvő  $\mathbb{R}$ -en!

**5p** b) Igazold, hogy az  $f$  függvény bijektív!

c) Határozd meg azokat az  $a$  valós számokat,

**5p** amelyekre a  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^a}$  határérték létezik, véges és nullától különböző!

2. Adott az  $(I_n)_{n \geq 1}$  sorozat úgy, hogy  $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

**5p** a) Számítsd ki az  $I_1$  értékét!

**5p** b) Igazold, hogy az  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sorozat konvergens!

**5p** c) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$  határértéket!