

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x-1|}{e^x}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f függvény nem deriválható az $x_0 = 1$ pontban!

5p b) Határozd meg az $f(x) = m$ egyenlet megoldásainak számát az m valós paraméter függvényében!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n))$ határértéket!

2. Adott az $f: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 \sin x$ függvény.

5p a) Igazold, hogy léteznek az a, b, c valós számok úgy, hogy az f függvény egy primitív függvénye az $F: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = (ax^2 + b)\cos x + cx \sin x$ függvény legyen!

5p b) Számítsd ki az $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} f\left(\frac{1}{2x}\right) dx$ értékét!

5p c) Számítsd ki az f függvény grafikus képe és a $g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \pi x - x^2$ függvény grafikus képe által határolt síkidom területét!