

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Tetszőlegesen  $n$  nullától különböző természetes szám esetén értelmezzük az

$$f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n + \ln x \text{ függvényt.}$$

**5p** a) Igazold, hogy az  $f_2$  függvény szigorúan növekvő a  $(0, \infty)$  intervallumon!

**5p** b) Igazold, hogy bármely  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén, az  $f_n(x) = 0$  egyenletnek

egyetlen valós megoldása van az  $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$  intervallumban!

**5p** c) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{f_2(x) - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$  határértéket!

2. Adott az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-\infty, 0] \\ 1 + \sin x, & x \in (0, \infty) \end{cases}$  függvény.

**5p** a) Igazold, hogy az  $f$  függvény integrálható a  $[-2\pi, 2\pi]$  intervallumon!

**5p** b) Számítsd ki az  $\int_{-1}^{\pi} f(x) dx$  értékét!

**5p** c) Igazold, hogy bármely  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén  $\int_0^{2\pi} f^n(x) dx \leq 2^n \pi$ .