

**Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f : (-\infty, -2) \cup (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)$  függvény.

**5p** a) Igazold, hogy az  $f$  függvény konkáv a  $(-\infty, -2)$  intervallumon.

**5p** b) Számítsd ki az  $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n) - \ln \frac{n(n+1)}{2}$  sorozat határértékét.

**5p** c) Igazold, hogy létezik egy  $c \in (1, 2)$  érték, amelyre  $(c-1)f'(c) + f(c) = f(2)$ .

2. Adott az  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x^4}$  függvény.

**5p** a) Számítsd ki az  $\int_0^1 xf(x)dx$  értékét.

**5p** b) Igazold, hogy:  $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$ .

**5p** c) Számítsd ki az  $\int_0^1 \frac{f(x)f''(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} dx$  értékét.