

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $M = \{f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ kétszer deriválható és } f(0) = 0, f'(0) = 1\}$ függvényhalmaz.

5p a) Igazold, hogy az $u : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, u(x) = e^x \sin x$ függvény benne van az M halmazban.

5p b) Ha $f \in M$ és $f(x) \neq 0, \forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, igazold, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + f(x))^{\frac{1}{x}} = e$.

5p c) Ha $f \in M$ és $n \in \mathbb{N}^*$, igazold, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^n(x) - x^n}{x^{n+1}} = \frac{nf''(0)}{2}$.

2. Adottak az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x}$ és $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \int_0^x f(t) dt$ függvények.

5p a) Igazold, hogy: $g(x) = \ln(1+x)$.

5p b) Számítsd ki az $\int_0^1 f^2(x)g(x)dx$ értékét.

5p c) Bizonyítsd be, hogy $f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \leq n \ln 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén.