

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2}$ függvény.

5p a) Tanulmányozd az f függvény deriválhatóságát az origóban.

5p b) Igazold, hogy bármely $k \in (0, \infty)$ esetén létezik olyan $c \in (k, k+1)$, amelyre $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{\sqrt[3]{c}}$.

5p c) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - f(n)$ sorozat szigorúan csökkenő.

2. Adott az $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$ függvény.

5p a) Számítsd ki az $\int_0^1 f(x) dx$ értékét.

5p b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^5}$ határértéket, ahol $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, $x \in [0, +\infty)$.

5p c) Felhasználva esetleg az f függvényt, igazold, hogy: $\int_0^1 \ln(1+x) \leq \frac{5}{12}$.