

Ministerul Educatiei, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ függvény.

5p a) Tanulmányozd az f függvény monotonitását!

5p b) Igazold, hogy $(x^2 + 1)f''(x) + xf'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén!

5p c) Igazold, hogy az f függvény grafikus képének van aszimptotája a $-\infty$ -ben!

2. Adott az $(I_n)_{n \geq 1}$ sorozat, $I_n = \int_0^1 \frac{nx^n}{x^n + 1} dx$.

5p a) Számítsd ki az I_1 értékét!

5p b) Igazold, hogy $I_n = \ln 2 - \int_0^1 \ln(1 + x^n) dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ határértéket!