

**Ministerul Educatiei, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Minden  $a > 0$  esetén, tekintsük az  $f_a : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_a(x) = (x + a) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$  függvényt.

**5p** a) Számítsd ki  $f'_a(x)$ -et, ha  $x > 0$ .

**5p** b) Határozd meg az  $a$  értékét úgy, hogy az  $f_a$  függvény konvex legyen!

**5p** c) Igazold, hogy az  $f_a$  függvény grafikus képének van aszimptotája a  $+\infty$ -ben!

2. Legyen  $(I_n)_{n \geq 1}$  sorozat, ahol  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$  esetén.

**5p** a) Számítsd ki az  $I_2$  értékét!

**5p** b) Igazold, hogy  $nI_n = (n-1)I_{n-2}, \forall n \geq 3$  esetén!

**5p** c) Bizonyítsd be, hogy az  $(I_n)_{n \geq 1}$  sorozat konvergens!