

Ministerul Educatiei, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adottak az $f_n : [0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^{n+1} - (n+2)x + n$, $n \in \mathbb{N}^*$ függvények.

5p a) Igazold, hogy az f_n függvények grafikus képének nincs aszimptotája $+\infty$ -ben!

5p b) Igazold, hogy $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén, az f_n függvénynek egyetlen egy x_n szélsőérték-pontja van!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{n^2}$ határértéket, ahol az x_n a b) pontban értelmezett szélsőérték-pont!

2. Legyen az $(I_n)_{n \geq 1}$ sorozat, $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$.

5p a) Számítsd ki I_1 értékét!

5p b) Igazold, hogy $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$, $\forall n \geq 1$ esetén!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ határértéket!