

**Soluții**

1. a)  $A^2 = O_2 \Rightarrow \det A^2 = 0.$

b) Fie  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  atunci din  $X \cdot A = A \cdot X$  obținem:  $x = t, z = 0.$

Notăm  $x = a \in \mathbb{R}, y = b \in \mathbb{R} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$

c)  $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  atunci din  $Y^2 = A$  obținem  $x^2 + yz = 0, t^2 + yz = 0, y(x+t) = 1$  și  $z(x+t) = 0.$  Se obține o contradicție.

2. a)  $\hat{a}$  este inversabil în  $\mathbb{Z}_6$  dacă  $(a, 6) = 1.$  Deci avem 2 elemente inversabile:  $\hat{1}; \hat{5}.$

b)  $\hat{2}x + \hat{1} = \hat{5} \Rightarrow x = \hat{2}$  și  $x = \hat{5}.$  Atunci  $S = \hat{1}.$   $x^2 = x \Leftrightarrow x = \hat{0}, x = \hat{1}, x = 3, x = \hat{4}.$  Atunci  $P = \hat{0}.$   
 $S + P = \hat{1}.$

c)  $x^3 = \hat{0} \Leftrightarrow x = \hat{0} \Rightarrow P = \frac{1}{6}.$