Soluție

1.a. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = A \Rightarrow A \in G$.

b. $A^2 = A,$ din punctul a) $\Rightarrow$ $A^3 = A^2 \cdot A = A \cdot A = A \Rightarrow \det\left(A^3 - 2A^2 + A\right) = \det\left(A - 2A + A\right) = 0.$

c. $\left(2X - I_2\right)^2 = \left(2X - I_2\right)\left(2X - I_2\right) = 4X^2 - 2XI_2 - 2XI_2 + I_2 = 4X^2 - 4X + I_2 = 4X - 4X + I_2 = I_2$.

2.a. $x * y = xy - \sqrt{2009}\left(x + y\right) + 2009 + \sqrt{2009} = xy - \sqrt{2009}x - \sqrt{2009}y + 2009 + \sqrt{2009} =$

$= x\left(y - \sqrt{2009}\right) - \sqrt{2009}\left(y - \sqrt{2009}\right) + \sqrt{2009} = \left(x - \sqrt{2009}\right)\left(y - \sqrt{2009}\right) + \sqrt{2009}\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

b. Se arată că $\exists e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * e = e * x = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Existența elementului e se determină din $x * e = x, \forall x \in \mathbb{R}$ de unde se obține $e = \sqrt{2009} + 1 \in \mathbb{R}$.

c. Datorită asociativității legii $*$, grupând termenii și ținând cont de cerința **a)**, obținem $\left[\left(-\sqrt{2009}\right) * \left(-\sqrt{2008}\right) * \ldots * 0 * \ldots * \left(\sqrt{2008}\right)\right] * \left(\sqrt{2009}\right) = \alpha * \left(\sqrt{2009}\right) = \sqrt{2009}$,

unde am notat cu $\alpha = \left(-\sqrt{2009}\right) * \left(-\sqrt{2008}\right) * \ldots * 0 * \ldots * \left(\sqrt{2008}\right) \in \mathbb{R}$.