Soluție

1.a. $\det(A)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&4&16\end{vmatrix}=32+4+4-2-16-16=6.$

b. $\det(A)=\begin{vmatrix}1&1&1\\a&2&4\\a^2&4&16\end{vmatrix}=(2-a)(4-a)(4-2)=2(a-2)(a-4)$. $\det(A)\neq 0\Rightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{2,4\}$.

c. Deoarece $\det(A)=2(a-2)(a-4)\neq 0,\ \forall a\in\mathbb{R}\setminus\{2,4\}\Rightarrow x=y=z=0.$

2.a. Avem $f(1)+f(-1)=2009\Leftrightarrow 2+2c=2009\Leftrightarrow c=\frac{2007}{2}.$

b. Din $\left.\begin{matrix}f(0)=-2\\f(1)=a+b-2+1=-2\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+b=-1$ şi $c=-2$. Cum $x_1=2$ este soluție $\Rightarrow\ 8a+2b=-14$ de unde

$\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=1\\c=-2\end{cases}.$

c. Pentru $a=-2,\ b=1$ şi $c=-2$ avem $x^4-2x^3+x-2=(x^2-x+1)(x^2-x-2)$ care are rădăcinile reale,
$x_1=-1$ şi $x_2=2.$