

**Soluție**

**1.a.**  $\det A = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ sau } x = 1.$

**b.**  $A^2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 1 & 2x \\ 2x & x^2 + 1 \end{pmatrix}.$  Egalitatea  $A_x^2 = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x^2 + 1 & 2x \\ 2x & x^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0.$

**c.** Din  $A_x^2 = \begin{pmatrix} x^2 + 1 & 2x \\ 2x & x^2 + 1 \end{pmatrix}$  și  $2x \cdot A_x = \begin{pmatrix} 2x^2 & 2x \\ 2x & 2x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_x^2 = 2xA_x + (1 - x^2)I_2.$

**2. a)** După rezolvarea sistemului obținem  $a = \hat{0}$  sau  $b = \hat{2}.$

**b.** Avem  $f = X^3 + \hat{2}X^2 + \hat{2}X + \hat{1} = (X + \hat{1})(X^2 + X + \hat{1})$  de unde rezultă cămul  $X^2 + X + \hat{1}$  și restul  $\hat{0}.$

**c.**  $f(\hat{1}) = a^3 + \hat{2}a + \hat{2}a + \hat{1} = a^3 + a + \hat{1},$  dar  $a^3 = a, \forall a \in \mathbb{Z}_3 \Rightarrow f(\hat{1}) = \hat{2}a + \hat{1}.$